数理解析研究所講究録
248巻 1975年 83-97

双曲型方程式の必要条件

東大 理　中村 如

目次

§1. Introduction (定義と結果) 1

§2. 定理1の証明 4

§3 定理1から定理2をだす 13.

参考文献 14

§1. Introduction（定義と結果）

この論文で扱う問題は P.D. Lax [4] の論文の定理の拡張である。即ち M を次の形の一階の作用素とする。

$$M = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_j A_j(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j} + B(t,x)$$

ここで $A_j(t,x)$, $B(t,x)$ は analytic 係数の $m\times m$ 行列

D を $t=0$ 上の領域，G を (t,x)-space で D を含む領域とする。

$\phi(x)$ を D における函数，$f(t,x)$ を G における函数とする．

このとき Cauchy 問題とは D における一階の連続導函数が ϕ に等しく，$Mu=f$ をみたす u をみつけることである。

そして

定義　M に対する Cauchy 問題が properly posed とは線型空間 $C^\infty(D)$ と $C^\infty(G)$ との pair に属する任意の ϕ, f に対し unique な解 $u(t,x)\in C^1(G)$ が存在することである。

この時次の定理が言える．

定理（P.D. Lax [4]）

上のような operator M に対して　平面 $t=0$ が空間的でない即ち実係数 P_i に対して　ある線型結合 $P_1A_1+\cdots+P_nA_n$ が実でない単根を $x=x_0$, $t=0$ でもつとする。

このとき M に対する Cauchy 問題は x_0 を含む超平面 $t=0$ 上の任意の領域 D に対して，incorrectly posed である。

この定理は，formal expansion を利用して，$\{\phi_\tau\}$ 及び $\{f_\tau\}$ が各々 $C^\infty(D)$ と $C^\infty(G)$ で有界で，$C^1(G)$ において発散する解 $\{u_\tau\}$ を構成することによって示されている。これをもとにして次のような定義の拡張と結果を得た。

$P(t,x,\partial_t,\partial_x)$ は real analytic な係数をもつ m 階偏微分作用素として，$t=0$ を non-characteristic としていると仮定する。

定義　$P(t,x,\partial_t,\partial_x)$ に対する Cauchy 問題が well-posed

$\Leftrightarrow$ D を $t=0$ における領域，G を D を含む (t,x) 空間における領域とする。$\phi_k(x)$，$f(t,x)$ を各々 D 及び G で定義された ultradistribution とする。このとき任意の ϕ_k，f に対して

$$\begin{cases} P(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x) = f(t,x) \\ \dfrac{\partial^k}{\partial t^k}u(0,x) = \phi_k(x) \qquad 0 \le k \le m-1 \end{cases}$$

に対して唯一つの解が ultradistribution の範囲で解ける。

定理1　simple characteristic で，かつ $t=0$ を non-characteristic とする m 階の偏微分作用素 $P(t,x,\partial_t,\partial_x)$（実解析係数）に対して特性方程式

$$P_m(t,x,\lambda,\xi) = 0 \qquad (P_m \text{ は } P \text{ の主要部})$$

の根 $\lambda_1(t,x,\xi),\cdots,\lambda_m(t,x,\xi)$ の根のうち少くとも1根が (t,x,ξ) 実のとき，虚の値をとれば

任意の時間 $t=\varepsilon(>0)$ で爆発し，(即ち ultradistribution になり) data は real analytic となる解がつくれる。

この定理 1 を用いて次の定理が言える。

定理 2. 定理 1 の作用素 $P(t, x, \partial_t, \partial_x)$ に対する Cauchy 問題が well-posed ならば，特性方程式の根は real である。

この定理 1 は浜田〔1〕の結果を用いて，ultradistribution を超える解を構成することによって示した。又 ultradistribution を超えるかどうかの判定には小松〔2〕の常微分作用素に関する研究を用りた。

§2. 定理1の証明

simple characteristic を仮定するから，$P_m(t,x,\lambda,\xi)=0$ の根はすべて原点の近傍で distinct かつ holomorphic。従って real でない根 $\tau(t,x,\xi)$ が存在したとしても holomorphic である。

$$\begin{cases} \varphi_t = \tau(t,x,\varphi_x) \\ \mathrm{Im}\,\tau(0,0;1,0,\cdots,0)\neq 0 \\ \varphi(0,x)=x_1 \end{cases}$$

となる解を考える。

このとき Cauchy-Kowalevski の定理より一定の領域で解ける。

今この解 $\varphi(t,x)=0$ と $\mathbb{R}^{n+1}$ との交わりを考えると

$t=0$ で $x_1=0$

$t\gtrless 0$ で $\mathrm{Im}\,\varphi\gtrless 0$ であるから $t=0,\ x_1=0$ が $\mathbb{R}^{n+1}$ との交わりになる。

$$\frac{d}{ds}f_j(s)=f_{j-1}(s) \quad j=-m,-m+1,\cdots$$

$$f_0(s)=\frac{(-1)^{l-1}(l-1)!}{s^l}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$f_l(s)=\log s$$

$$f_{\ell+\alpha}(s) = \frac{s^\alpha}{\alpha!}\log s - \frac{A_\alpha}{\alpha!}s^\alpha$$

$$A_\alpha = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\alpha} \quad \text{かつ } A_0 = 0$$

となる函数列 f_j を用いて

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\varphi(t,x))\, u_k(t,x) \quad \text{なる}$$

形の解で次の方程式を満足するものを考える。

$$\begin{cases} P(t,x,\partial_t,\partial_x)\,u = 0 \\ \text{かつ} \quad u(0,x) = (-1)^{\ell-1}(\ell-1)!\,\dfrac{w(x')}{x_1^{\ell}} \end{cases}$$

一般に $a(x,\partial_x)$ を m 階の微分作用素とするとき

$$a(x,\partial_x)\,[f(\varphi)u]$$

$$= f^{(m)}(\varphi)\,h(x,\varphi_x)u + f^{(m-1)}(\varphi)\Big\{\sum_{j=1}^{n} h^{(j)}(x,\varphi_x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + C_1 u\Big\}$$

$$+ f^{(m-2)}(\varphi)L_2[u] + \cdots\cdots \quad + f(\varphi)L_m[u]$$

但し $h^{(j)}(x,\xi) = \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}h(x,\xi)$ 　$C_1(x)$ は holomorphic

L_p は holomorphic 係数をもつ p 次微分作用素

$h(x,\xi)$ は $a(x,\xi)$ の主要部

であるから

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\varphi(t,x))\, u_k(t,x) \quad \text{に作用させて}$$

各係数について 0 とおき，次の方程式をえる

$$(1) \cdots\cdots \mathcal{L}[u_0] = \frac{\partial u_0}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_j(t,x)\frac{\partial u_0}{\partial x_j} + c(t,x)u_0 = 0$$

$$(2) \cdots\cdots \mathcal{L}[u_k] = -\sum_{p=2}^{m} L_p[u_{k+1-p}] \quad (k \geq 1)$$

$$u(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_1)\,u_k(0,x) = f_0(x_1)\,w(x')$$

従って (3)… $u_0(0,x) = w(x')$

(4)… $u_k(0,x) = 0 \quad (\text{for } k \geq 1)$

(1)と(3)，(2)と(4) は 各々 Cauchy-Kowalevski の定理より

解くことができる。

以上より
$$\begin{cases} P(t,x,\partial_t,\partial_x)\,u_\ell(t,x) = 0 \\ u_\ell(0,x) = \dfrac{(-1)^{\ell-1}(\ell-1)!}{x_1^{\ell}} \\ u_\ell(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\varphi)\,u_{\ell,k}(t,x) \end{cases}$$

となる解 $u_\ell(t,x)$ がつくれたことになる。

今
$$C_\ell = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\dfrac{1}{m!} & \ell = k\,{}^{\exists}m \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とおいて $u(t,x) = \sum C_\ell\, u_\ell(t,x)$ とおいてやると

$$\begin{cases} P(t,x,\partial_t,\partial_x)\,u = 0 \\ u(0,x) = \exp\dfrac{1}{x_1^{k}} - c \end{cases}$$
となる解が

構成されたことになる。

次に この解の収束性を考察する。その際に

溝畑[5] による次の命題を使う。

Prop 1. $a(x)$, $b(x)$ holomorphic とする。

$$|D^\nu a(x)| \leq \frac{(r+|\nu|)!}{(k\rho)^{|\nu|}} A \qquad k>1$$

$$|D^\nu b(x)| \leq \frac{(s+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}} B$$

r, s は非負の整数

このとき $|D^{\nu}(ab)(x)| \leq \dfrac{(r+s+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}} \dfrac{AB}{C_r^{r+s}} \dfrac{k}{k-1}$

次に $\mathcal{L} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \sum a_j(t.x)\dfrac{\partial}{\partial x_j} + c(t.x)$

$a_j(t.x)$, $c(t.x)$ は holomorphic functions で

$|D_{t,x}^{\nu} a_j(t,x)| \leq \dfrac{(|\nu|-1)!}{(3\rho)^{|\nu|-1}} \gamma \ (|\nu| \geq 1)$ $|a_j(t.x)| \leq \gamma_0$

$|D_{t,x}^{\nu} c(t,x)| \leq \dfrac{|\nu|!}{(3\rho)^{|\nu|}} \gamma \qquad (|\nu| \geq 0)$

なる estimate を満たすとする。

Prop. 2. $\mathcal{L}[u] = f(t.x)$

$u(0,x) = 0$ なる Cauchy 問題を考える

$f(t,x)$ が次の評価をみたすとせよ。

$$|D_t^{\delta} D_x^{\nu} f(t,x)| \leq \frac{(r+\delta+|\nu|)!}{\rho^{\delta+|\nu|}} \exp(\gamma|t|)\, K(|t|)^{r+\delta+|\nu|} (\gamma n)^{\delta} A$$

(但し $r \geq 1$)

このとき $|D_t^{\delta} D_x^{\nu} u(t,x)| \leq 2 \dfrac{(r-1+\delta+|\nu|)!}{\rho^{\delta+|\nu|}} \exp(\gamma|t|)\, K(|t|)^{r+\delta+|\nu|} (\gamma n)^{\delta} A$

ここで $K(t) = \exp(\gamma n t)(1+\gamma n t)$ γ と ρ とは

$\gamma \geq \min(6\gamma_0, 27)$, $0 < \rho \leq \dfrac{1}{18}$ を満たす定数

Prop. 3. $\mathcal{L}[u] = 0$ で

初期条件 $u(0,x)$ が $|D_x^{\nu} u(0,x)| \leq \dfrac{(r+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}} A \ (r \geq 0)$

を満たす。

$\Longrightarrow |D_t^{\delta} D_x^{\nu} u(t,x)| \leq 2 \dfrac{(r+\delta+|\nu|)!}{\rho^{\delta+|\nu|}} \exp(\gamma|t|)\, K(|t|)^{r+\delta+|\nu|} (\gamma n)^{\delta} A$

ここで γ, ρ は Prop. 2. の条件を満たす

ここで $u_{\ell,k}(t,x)$ について induction より次の estimate がいえる。

(5) $\cdots$ $|D_t^{g} D_x^{\nu} u_{\ell,k}(t,x)| \leq C(k) \dfrac{(k+g+|\nu|)!}{\rho^{k+g+|\nu|}} \exp(\gamma|t|)\, \dfrac{K(|t|)^{k+g+|\nu|}}{(\gamma n)^{g}}$

$C(k) = C_0^{k} N$ $(C_0>1)$, N は $P(t,x,\partial_t,\partial_x)$ のみによる定数

$k=0$ は Prop. 3 よりすぐでる.

kまで仮定して $(k+1)$ をだす。

$2 \leq p \leq m$ に対して

$$|D_t^{g} D_x^{\nu} L_p [u_{\ell,k+2-p}]|$$
$$\leq N_p\ C(k+2-p) \frac{(k+2+g+|\nu|)!}{\rho^{k+2+|\nu|+g}} \exp(\gamma|t|) \frac{K(|t|)^{k+2+g+|\nu|}}{(\gamma n)^{g+p}}$$

N_p は L_p による定数

$L = \sum_{p=2}^{m} N_p$ とおき, $p=2$ から mまで加えて

$$\left|\sum_{p=2}^{m} D_t^{g} D_x^{\nu} L_p[u_{\ell,k+2-p}]\right|$$
$$\leq L\, C(k) \frac{(k+2+g+|\nu|)!}{\rho^{k+2+g+|\nu|}} \exp(\gamma|t|) \frac{K(|t|)^{k+2+g+|\nu|}}{(\gamma n)^{g+m}}$$

L は $P(t,x,\partial_t,\partial_x)$ のみ による定数

Prop. 2 より

$$|D_t^{g} D_x^{\nu} u_{\ell,k+1}(t,x)|$$
$$\leq 2L\, C(k) \frac{(k+1+|\nu|+g)!}{\rho^{k+2+|\nu|+g}} \exp(\gamma|t|) \frac{K(|t|)^{k+2+g+|\nu|}}{(\gamma n)^{g+m}}$$

$K(|t|) \leq K(1)$ for $|t| \leq 1$ より

$$|D_t^{g} D_x^{\nu} u_{\ell,k+1}(t,x)|$$
$$\leq 2L \frac{K(1)}{\rho} C(k) \frac{(k+1+|\nu|+g)!}{\rho^{k+1+|\nu|+g}} \exp(\gamma|t|) \frac{K(|t|)^{k+1+g+|\nu|}}{(\gamma n)^{g+m}}$$

$C_0 = 2\max(2L\frac{K(1)}{\rho}(\gamma n)^m,\ 1)$ とおくと

求める estimate がいえたことになる。

これから $|(t,x)| \leq \delta$ として

(6)…… $|D_t^g D_x^\nu u_{\ell,k}(t,x)|$

$$\leq C_0^k N \frac{(k+g+|\nu|)!}{\rho^{k+g+|\nu|}} \exp(\gamma\delta)\, K(\delta)^{k+g+|\nu|}(\gamma n)^{g+|\nu|}$$

$$\leq N \frac{(k+g+|\nu|)!}{\rho(\delta)^{|\nu|+g}} C(\delta)^k \exp(\gamma\delta)$$

for $|(t,x)| < \delta$

ここで $C(\delta) = \frac{K(\delta)C_0}{\rho}$ $\quad \rho(\delta) = \frac{\rho}{K(\delta)\gamma n}$

$u(t,x) = \sum C_\ell u_\ell(t,x)$ より

$$\sup_{\substack{\varepsilon\leq|x_1|\leq\rho \\ |x'|\leq\rho}} |C_\ell u_\ell(0,x)| \leq \sup_{\substack{\varepsilon\leq|x_1|\leq\rho \\ |x'|\leq\rho}} |u(0,x)| = M(\varepsilon)$$

一方 $u_\ell(0,x) = \frac{(-1)^{\ell-1}(\ell-1)!}{x_1^\ell}$ より

(7)… $C_\ell(\ell-1)! \leq \varepsilon^\ell M(\varepsilon)$

(8)… $|u_{\ell,k}(t,x)| \leq N k!\, C(\delta)^k \exp(\gamma\delta)$

$$u(t,x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} C_\ell [\{\sum_{\alpha=1}^{\ell}(-1)^\alpha \frac{(\alpha-1)!}{\varphi^\alpha} u_{\ell,\ell-\alpha}\} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^k}{k!} u_{\ell,\ell+k}\log\varphi$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{k!}\varphi^k u_{\ell,\ell+k}$$

これから $u(t,x)$ の収束性を第1項について計算すると

$\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell-1}(\ell-1)!}{\varphi^\ell}\sum_{k=\ell}^{\infty} C_k u_{k,k-\ell}$ については (7) より

$$\sum_{k=l}^{\infty}|c_k u_{k,k-l}| \leq \sum_{k=l}^{\infty}\frac{\varepsilon^k M(\varepsilon)}{(k-1)!} N\,(k-1)!\,C(\delta)^{k-l}\exp(\gamma\delta)$$

$$\leq \frac{NM(\varepsilon)\exp(\gamma\delta)}{(l-1)!}\sum_{k=l}^{\infty}\overbrace{\frac{(k-1)!(l-1)!}{(k-1)!}}^{\leq 1}\varepsilon^k C(\delta)^{k-l}$$

$$\leq \frac{NM(\varepsilon)\exp(\gamma\delta)}{(l-1)!}\ \frac{\varepsilon^l}{1-\varepsilon C(\delta)}$$

$$\therefore \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(l-1)!}{|\varphi|^l}\sum_{k=l}^{\infty}|c_k u_{k,k-l}| \leq \sum_{l=1}^{\infty}\frac{NM(\varepsilon)\exp(\gamma\delta)}{1-\varepsilon C(\delta)}\left(\frac{\varepsilon}{|\varphi|}\right)^l$$

$\varepsilon/|\varphi| < 1$ 即ち $\varepsilon < |\varphi|$ のとき収束する

第2項については

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\varphi|^k}{k!}|u_{l,l+k}| \leq \sum_{k=0}^{\infty}N\frac{(l+k)!}{k!}C(\delta)^{l+k}\exp(\gamma\delta)|\varphi|^k$$

$$\leq C(\delta)^l\, l!\, N\exp(\gamma\delta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(l+k)!}{k!\,l!}(C(\delta)|\varphi|)^k$$

$$\leq C(\delta)^l\, l!\, N\exp(\gamma\delta)\frac{1}{(1-C(\delta)|\varphi|)^{l+1}}$$

$$\therefore \quad \sum_{l=1}^{\infty}c_l\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\varphi|^k}{k!}|u_{l,l+k}|$$

$$\leq NM(\varepsilon)\exp(\gamma\delta)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l\,(\varepsilon C(\delta))^l}{(1-C(\delta)|\varphi|)^{l+1}}$$

これは $\left|\dfrac{\varepsilon C(\delta)}{1-C(\delta)|\varphi|}\right| < 1$ 即ち $|\varphi| < \dfrac{1-\varepsilon C(\delta)}{C(\delta)}$

のとき収束する。

第3項についても同様である。

以上より $t<0$ で $u(t,x)$ が real analytic である

ことがわかった。

従って

$$\begin{cases} P(t,x;\partial_t,\partial_x)u(t,x)=0 \\ \qquad u(0,x)=\exp\dfrac{1}{x_1^k}-c \\ \qquad t<0 \text{ で } u(t,x) \text{ real analytic} \end{cases}$$

となる解 $u(t,x)$ が構成された。

小松[2]によれば次の定理が証明されている。

定理. $s>1$ とするとき

微分作用素 $P(x,\frac{d}{dx})=a_m(x)\frac{d^m}{dx^m}+\cdots\cdots+a_0(x)$

に対して次は同値

(a) $\mathcal{B}^P(a,b)\subset\mathcal{D}^{(s)'}(a,b)$ $\quad(\mathcal{D}^{\{s\}'}(a,b))$

(b) (a,b)に属するすべての特異点の非正則度 σ が

$$\sigma\le\frac{s}{s-1}, \qquad \left(\sigma<\frac{s}{s-1}\right)$$

をみたす。

これを $P(x,\frac{d}{dx})=x^{k+1}\frac{d}{dx}+k$, $(a,b)=(1,-1)$

に適用すると

$$\exp\frac{1}{x_1^k}\in\mathcal{D}^{(s)'}(-1,1)\iff k+1\le\frac{s}{s-1}$$

$$\exp\frac{1}{x_1^k}\in\mathcal{D}^{\{s\}}(-1,1)\iff k+1<\frac{s}{s-1}$$

従って $k>\frac{1}{s-1}$ とすれば

$\exp\frac{1}{x_1^k}$ は $\mathcal{D}^{(s)'}$, $\mathcal{D}^{\{s\}'}$ となり

ultradistribution をこえることがいえる。

従って $P(t, x, \partial_t, \partial_x)u(t, x) = 0$ を満足し．

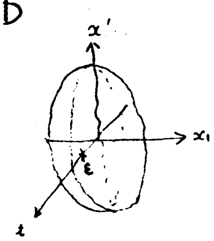
$t<0$ で data が real analytic であり，

$t=0$ で ultradistribution を超える解がつくれたことになる。任意の時間 $\varepsilon(>0)$ を初期面としてとれば，ε で爆発する解がつくれたことになる。

以上より定理1は証明された。

§3. 定理 1 から定理 2 をだす

well-posed より $t=0$ における領域 D 及びそれを含む (t,x)-space の領域 G があり D 上に Cauchy data，G に函数を与えたとき G で解 $u(t,x)$ が存在して unique である。



一方定理 1 より特性方程式の根が real でなければ $t=0$ で real analytic data をもち任意の時間 $\varepsilon(>0)$ で ultradistribution をとびだす解がつくれる。

そこで G と $x-0$ との切り口を G_t として $\varepsilon<\mathrm{dist}(0,\partial G_t)$ とすると well-posed と矛盾する。即ち特性方程式の根は real である。

参考文献

[1] Y. Hamada, The singularities of the solutions of the Cauchy problem, Publ. RIMS, Kyoto Univ. vol. 5 (1969), 21–40

[2] H. Komatsu, 常微分作用素について
数理研講究録 145 (1972), 123–146

[3] H. Komatsu, Ultradistributions, I,
J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A, vol 20
No. 1 25–105

[4] P. D. Lax, Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J. 24 (1957), 627–646

[5] S. Mizohata, Analyticity of the fundamental solutions of hyperbolic systems, J. Math. Kyoto Univ. 1-3 (1962), 327–355